

Dev n° 32

Ref: Girton "Algèbre" p 180
 + Isenmann: "L'oral à l'agrég. de maths."
 p 389. Site: Coquillages & Poincaré

Titre: Suite de polygones

Thm:

Soit $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ une suite d'affixes du plan complexe.Notons $Z_k = (z_{k,1}, \dots, z_{k,n})$ avec $Z_0 = Z$ et $Z_{k+1} = \left(\frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2}, \dots, \frac{z_{k,n} + z_{k,n+1}}{2} \right)$ Alors, la suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre des affixes $z_1, \dots, z_n$.Demo:* Récriture matricielle:

On a :

$$Z_{k+1} = \left(\frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2}, \dots, \frac{z_{k,n} + z_{k,n+1}}{2} \right) \Leftrightarrow Z_{k+1} = A Z_k \text{ avec}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Par récurrence immédiate on a $Z_k = A^k Z_0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.* Convergence de la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$:Il faut m.q. $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ cv dans $(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ avec $\|\cdot\|$ norme d'algèbre.

Regardons v.p. de A. On a:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \dots & a_0 \end{vmatrix} \sim \text{matrice circulante}$$

avec $a_0 = \frac{1}{2} - \lambda$ et $a_1 = \frac{1}{2}$
 et $a_i = 0 \ \forall i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$.

Posons $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = \frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{2} X^n$ et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ (racine primitive de l'unité)

On a:

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{j=1}^n P(\omega_j) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{2} \omega_j \right)$$

$$= \prod_{j=1}^n \left(\lambda - \underbrace{\frac{\omega_j + 1}{2}}_{:= y_j} \right)$$

On r.q. $y_i = y_j \Leftrightarrow i = j$.Donc, χ_A est scindé à racines simples $\leadsto A$ diag.Donc, $\exists R \in GL_n(\mathbb{C})$ t.q. $A = R^{-1} D R$ avec $D = \text{diag}(y_1, \dots, y_n)$.

Or par j.t.n, on a :

$$|y_j| = \left| \frac{\omega_j + 1}{2} \right| = \left| \frac{\omega^{j/2} + \omega^{j/2}}{2} \right| = \left| \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right) \right| < 1.$$

Donc $A^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} R^{-1} \text{diag}(0, \dots, 0, 1) R =: B$ Donc $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ cv.* Convergence de $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

* Convergence de $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

Soit $X = BZ_0$.

On a donc $Z_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} X$

* Isobarycentre:

De plus, par continuité et par passage de la limite on a $X = AX$.

Or l'espace correspondant E_1 à la v.p. 1 contient le vecteur $(1, \dots, 1)$.

Or E_1 est de dim 1.

Donc $(1, \dots, 1)$ engendre E_1 .

Donc, $\exists a \in \mathbb{C}$ t.q $X = (a, \dots, a)$.

Enfin, notons g l'isobarycentre de Z_0 , c'est aussi celui de Z_{k+1} car:

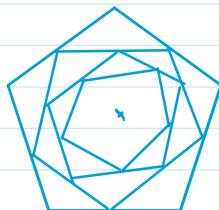
$$g_{k+1} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{k+1,i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{z_{k,i} + z_{k,i+1}}{2} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{k,i} = g_k$$

Donc, g est aussi l'isobarycentre de Z_k .

Par passage à la limite et continuité, g est encore l'isobarycentre de X .

Donc, $a = g$. $\square$

Dessin:



Annexe:

• Comment trouver le pol. caractéristique d'une matrice circulante:

Démo 1:

Remarque 1 (Matrices circulante et déterminant). On considère la matrice suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. $P(J)$. Un calcul direct donne :

$$P(J) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Une telle matrice est dite *circulante*. Le même calcul donne $J^n = I_n$ donc $\chi_J = X^n - 1$ est scindé à racines simples, J se diagonalise en $\Omega = \text{diag}(\omega^j, 0 \leq j \leq n-1)$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ une racine primitive de l'unité. On en déduit que $P(J)$ se diagonalise en $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \Omega^k$ et donc que $\det(P(J)) = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$.

On a $P(J) =$ matrice circulante
 $\Rightarrow \chi_{P(J)}(x) = \prod_{k=1}^n (x - P(\lambda_k))$

avec λ_k v.p. de J .
 On a $\chi_J(x) = x^n - 1$ ($J^n = Id$)
 Donc $\lambda_k = \omega^k = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)^k$

Démo 2:

Avec Vandermonde :

On considère la matrice $\Omega = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ (matrice de Vandermonde-Fourier).

Commençons par déterminer $\det(C\Omega)$:

Le coefficient d'indice (i, j) de la matrice $C\Omega$ est $\omega^{(i-1)(j-1)} P(\omega^{j-1})$, autrement dit :

$$C\Omega = \begin{pmatrix} P(1) & P(\omega) & \cdots & P(\omega^{n-1}) \\ P(1) & \omega P(\omega) & \cdots & \omega^{n-1} P(\omega^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(1) & \omega^{n-1} P(\omega) & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}$$

On a donc par n -linéarité du déterminant :

$$\det(C\Omega) = P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n-1} P(\omega^i) \det(\Omega)$$

De plus, $\det(\Omega) \neq 0$ puisqu'il s'agit d'un déterminant de Vandermonde dont les paramètres sont deux à deux distincts. Ainsi, on a (par multiplicativité du déterminant)

$$\det(C) = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i).$$

• Définition de l'isobarycentre :

A la fin, nous avons écrit : Par passage à la limite et par continuité, g est encore l'isobarycentre de X . Nous avons montré que g est l'isobarycentre de Z_k pour tout $k \in \mathbb{N}$ (i.e.)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{k,i} = g$$

Alors l'application,

$$\forall k \in \mathbb{N}, z_{k,i} \mapsto \sum_{i=1}^n (z_{k,i} - g) = 0$$

est continue en $z_{k,i}$ et on peut donc passer à la limite pour $k \rightarrow +\infty$

• Interprétation géométrique :

Ce théorème a une interprétation géométrique très intéressante ! En partant d'un polygone à n côtés, le polygone des milieux "converge" vers l'isobarycentre du polygone de départ. Attention cependant à l'emploi du mot "convergence" ... Même si, intuitivement, on comprend ce que ça veut dire, ce n'est pas mathématiquement correcte s'il n'y a pas de définition d'une topologie sur l'ensemble des polygones qui permettrait à une suite de polygones de tendre vers un point.

Le plus intrigant est que cette affirmation reste encore vraie si le polygone est non convexe (on dit aussi *polygone concave*). En effet, dans la démonstration, la suite de points est quelconque !



Illustration de la "convergence" des polygones

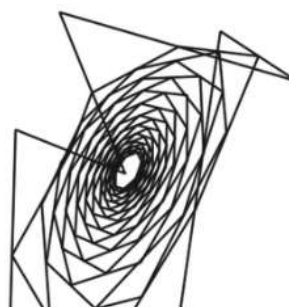
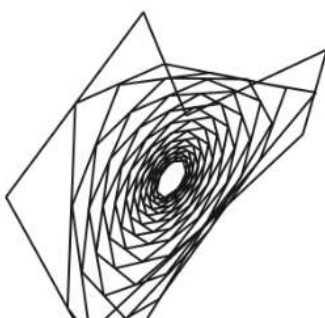




Illustration de la "convergence" des polygones non convexes

On rappelle qu'un polygone est convexe lorsque tout segment reliant deux points quelconques de ce polygone y est entièrement contenu. Un polygone non convexe possède au moins un angle rentrant. Les polygones convexes ont donc tous leurs angles saillants ou plats.

A POLYGON PROBLEM

E. R. BERLEKAMP, E. N. GILBERT, AND F. W. SINDEN,
Bell Telephone Labs., Murray Hill, N. J.

Let P_0 be a closed polygon. Let P_1 be the polygon obtained by joining the midpoints of P_0 's sides in order (see Figure 1). We write

$$P_1 = TP_0.$$

Let $P_2 = TP_1$, $P_3 = TP_2$, etc. We will call $P_1, P_2, P_3, \dots$ the *descendants* of P_0 . We consider the question: for what polygons P_0 does there exist a *convex* descendant P_n ?

It is easy to show that all descendants of convex polygons are convex. Hence, the existence of one convex descendant implies the existence of infinitely many.

For polygons with fewer than five sides the results are immediate:

2-gons: all descendants have coincident vertices.

3-gons: all descendants are similar to the parent P_0 , which is necessarily convex.

4-gons: all descendants are parallelograms, hence convex, though the parent P_0 may be nonconvex.

(To see the last result observe that the sides of P_1 are parallel to the diagonals of P_0 .)

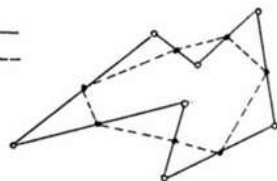


FIG. 1

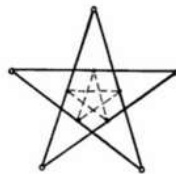


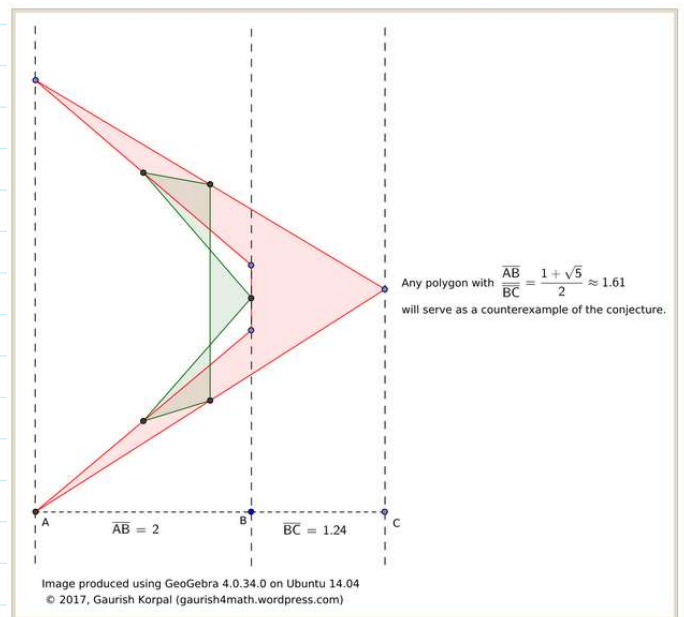
FIG. 2

Polygons with five or more sides are more complicated, but in many examples we found that repeated application of T led quickly to convex polygons. This did not seem surprising, for intuitively T is a smoothing operator. We began with the conjecture that every polygon ultimately has convex descendants.

Figure 2 shows this conjecture to be false. The regular pentagram begets only its own kind.

This example, though, may seem unfair since the pentagram intersects itself. Figure 3 shows a non-selfintersecting polygon without convex descendants.

This polygon, in fact, is less innocent than it looks. Not only are its descendants nonconvex but infinitely many of them are self-intersecting. (To see



• Réduction des matrices circulantes :

On a montré dans le développement que J était diagonalisable et que ses valeurs propres sont exactement les racines n -ièmes de l'unité. De plus, les valeurs propres de C sont exactement les $P(\omega^i)$ (non nécessairement distinctes). On peut alors prendre pour matrice de passage de la base canonique à la base propre la matrice :

$$U = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

Cette matrice U est unitaire ($U^*U = I_n$) et les formules de passage précédentes s'écrivent (en notant Λ la matrice diagonale de coefficients les valeurs propres) :

$$C = U\Lambda U^{-1} = U\Lambda U^* \text{ et } \Lambda = U^{-1}CU = U^*CU$$

Une nouvelle définition possible pour l'ensemble des matrices circulantes est alors l'ensemble des matrices de la forme UDU^* avec D diagonale (géométriquement, cela correspond aux endomorphismes qui admettent la base orthonormale des X_k comme base de vecteurs propres).

Thm:

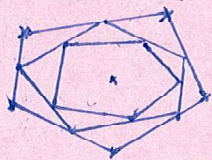
Soit $Z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ suites d'affixes du plan complexe.

Notons $Z_k = (z_{k,1}, \dots, z_{k,n})$, $Z_0 = Z$ et $Z_{k+1} = \left(\frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2}, \dots, \frac{z_{k,n} + z_{k,1}}{2} \right)$

Alors, la suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ cv vers l'isobarycentre des affixes

$z_1, \dots, z_n$

Schéma:



Démon:

* Écriture matricielle:

On a:

$$Z_{k+1} = A Z_k \text{ avec}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & (0) \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1/2 \\ 1/2 & & \end{bmatrix}$$

$$\text{et } Z_k = A^k Z_0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

* Cv de $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$:

On est dans $(M_n(\mathbb{C}), || \cdot ||)$.

Cherchons les v.p. de A:

$$\chi_A(\lambda) := \det(\lambda \text{Id} - A) = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & a_0 \end{vmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{matrice circulante} \\ \text{avec } a_0 = 1/2 - \lambda \\ a_1 = 1/2 \text{ et } a_i = 0 \\ \forall i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket \end{array}$$

$$\text{Posons } P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \text{ et } \omega := \exp(2i\pi/n).$$

$$\text{On a: } \chi_A(\lambda) = \prod_{j=1}^n P(\omega^j) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{2} \omega^j \right) = \prod_{j=1}^n \left(\lambda - \underbrace{\frac{\omega^j + 1}{2}}_{= y_j} \right)$$

$$r.q: y_i = y_j \Leftrightarrow i=j.$$

Donc, χ_A scindé à racines simples $\leadsto A$ diag.

Donc, $\exists R \in GL_n(\mathbb{C})$ t.q. $A = R^{-1} D R$ avec $D = \text{diag}(y_1, \dots, y_n)$.

Or pour $j \neq n$, on a:

$$|y_j| = \left| \frac{\omega^j + 1}{2} \right| = \left| \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right) \right| < 1$$

$$\text{Donc, } A^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} R^{-1} \text{diag}(0, \dots, 0, 1) R =: B$$

Donc, (A^k) cv

* Cv de $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\text{On a: } Z_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} B Z_0 =: X$$

* Isobarycentre:

De plus, par continuité et par passage à la limite on a:
 $X = AX$.

Or E_1 contient $(1, \dots, 1)$ et $\dim(E_1) = 1 \Rightarrow E_1 = \text{Vect}((1, \dots, 1))$.

Donc, $X = (a, \dots, a)$ avec $a \in \mathbb{C}$.

Enfin, notons g l'isobarycentre de Z_0 et g_k celui de Z_k .

On a:

$$g_{k+1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{k+1,i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{z_{k,i} + z_{k,i+1}}{2} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{k,i} = g_k.$$

Donc, g aussi l'isobarycentre de Z_k .

Par passage à la limite et continuité, g l'isobarycentre de X .

Donc, $a = g$ $\square$